

階層選択を用いた効率的な変形シミュレーション

今井 星[†] 楽 詠瀨[†] 陳 炳宇^{†,‡} 西田 友是[†]

東京大学[†] 国立台湾大学[‡]

1. はじめに

弾性体(例えばゴムボール)のシミュレーションは CG 分野で重要であり, 映画やゲームなどで利用されている. 本稿では, 物理則に忠実に計算できる有限要素法をベースに, 効率的な変形シミュレーション法を提案する. 有限要素法を用いた変形シミュレーションは Terzopoulos らにより CG の分野に初めて紹介された[1]. その後, O'Brian らの方法[2]に代表される変形手法が多く発表された. O'Brian らのモデルでは入力モデルを微小な四面体に一樣に分割し, 連続体力学に基づいて変形を計算する. 物理則に忠実なモデルであるが, 計算量が大きくシミュレーションに時間を要する. しかし変形の少ない部分は, 分割の解像度を粗くして要素数を減らしても, 少ない誤差でシミュレーションできると考えられる. そこで本稿ではこの考え方にに基づき, 変形の度合いに応じて解像度を切り替えながら, 効率的に変形を計算する手法を提案する.

2. 有限要素法を用いた変形シミュレーション

この節では, 四面体分割されたモデルの変形シミュレーション法を概説する(詳細は文献[2]を参照されたい). 連続体の変形は,

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

とかける. 式(1)は, 四面体が歪みテンソル ϵ_{kl} で記述された状態に歪んでいるとき, 弾性定数 C_{ijkl} で表される硬さの効果により, 元の形状に応力テンソル σ_{ij} の強さで戻ろうとすることを表す. 応力テンソル σ_{ij} と歪みテンソル ϵ_{kl} は二階のテンソルで表され, 弾性定数 C_{ijkl} は四階のテンソルで表される.

有限要素法を用いた変形シミュレーションでは, 微小時間毎に, まず各要素(四面体)の歪テンソル ϵ_{kl} を計算する. 次に式(1)により応力テンソル σ_{ij} を計算し, 各頂点に作用する応力を計算して, 速度, そして座標を更新する.

3. 提案法の基本的考え方

まず, 提案法では事前に入力モデルを再帰的に分割し, 階層構造を作る. (分割する前の四面体を親, 分割後に生成された四面体を子と呼ぶ.) 事前計算により, 後述の各階層の許容誤差条件や各階層の四面体の弾性定数を求める. シミュレーシ

ョン時は, 変形の度合いと許容誤差をもとに, 変形計算に用いる階層を局所的に変える. すなわち, 誤差が少ない条件において粗い階層を, 変形が大きい場合には細かい階層を選択する. これにより全体を一樣に細かく分割した場合(従来法)よりも少ない計算量でシミュレーション可能である.

4. 事前計算の処理

4.1. 弾性定数の計算法

最も細かい階層の四面体の弾性定数 C_{ijkl} が既知であるとして, 粗い四面体の弾性定数を計算する方法について述べる. 歪みテンソル ϵ_{kl} の大きさが十分に小さい場合には式(1)のように応力テンソル σ_{ij} と歪みテンソル ϵ_{kl} の間に線型性がなりたつ. この関係を用いて弾性定数を次のようにして計算することができる.

まず頂点を4.2節で述べる方法で決定した歪みテンソル ϵ に従って移動する. 次に粗い四面体の頂点をその位置に固定したまま細かい四面体を準静的に式(1)に従って釣り合いの状態になるまで変形させる. (最も細かい階層の四面体の弾性定数はわかっているので, この変形は計算できる). 釣り合いが取れたら, 粗い四面体の応力テンソルを計算する. はじめ

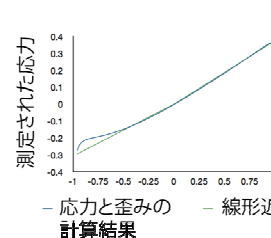


図1 応力の大きさと歪みの大きさの関係

に決定した歪みテンソルとここで計算した応力テンソルの関係から, 粗い四面体の弾性定数を推定できる. すなわち, 歪みの方向や大きさを変えた歪みテンソルを複数サンプリングし, 各歪みテンソルについて, 図1に示すように横軸に歪みの大きさ, 縦軸に求めた応力の大きさをとり, グラフにプロットする. これにより, グラフの傾きから弾性定数を計算することができる. また, このグラフを線型近似可能な範囲を求めることで, 粗い四面体を用いても少ない誤差で計算できる範囲がわかる. 本稿では, 線型近似できることを階層選択条件が満たされると定義する. シミュレーション時に階層選択条件が満たされない場合, その階層を用いて変形計算すると誤差が大きいので, より細かい階層を選択する必要がある.

上記の手続きを最も細かい階層以外のすべての階層に適用することで全ての四面体の弾性定数とその階層選択条件を決めることができる.

4.2. 歪みテンソルの決定

任意の歪みテンソルは6つの基底テンソルの線形結合で表せる. 歪みテンソルを $\epsilon_{kl} = \alpha \epsilon_{kl}^{(m)}$ とする. ここで α は $-1 < \alpha \leq 1$ を表す実数, $\epsilon_{kl}^{(m)}$ は基底テンソルである, m は基底の種類番号を表す. 基底テンソルを

$$\epsilon^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の6種類ととることにより, C_{ijkl} は σ_{ij} を用いて簡単に表せ, 計算が容易になる. 例えば $\epsilon_{kl}^{(1)}$ について計算すると $\sigma_{ij} = \sum C_{ijkl} \alpha \epsilon_{kl}^{(1)} = C_{ij11} \alpha$ となり $C_{ij11} = \sigma_{ij} / \alpha$ となる. 残り5つの基底テンソルについても同様に計算すると弾性定数 C_{ijkl} を一意に定めることができる.

5. シミュレーション時の処理

変形時の処理では, 4.1節で述べた階層選択条件に基づき一定の精度を保障しつつ, かつ可能な限り粗い階層を選択するように処理を行う. 毎更新時の処理では, まず, 選択されている四面体に対して, 階層選択条件を考慮し, 子に切り替える必要があるか判定する. もし子に切り替える必要がなければ, 次により粗い階層を選択可能か判定する. 次の3つの条件が同時に満たされた場合, 粗い階層に切り替える.

- (i) 親が, 階層選択条件を満たしている.
- (ii) 選択している四面体の全ての兄弟(同じ親を持つ四面体)が選択されている.
- (iii) すべての子の歪みテンソルが親の歪みテンソルと十分一致している.

四面体の階層選択を終えたら, 式(1)に基づいて変形を計算する.

6. 結果

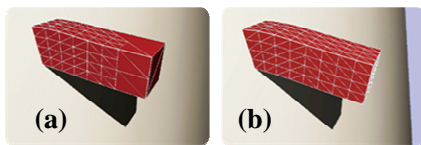


図2 (a)本手法と(b)従来法の変形シミュレーションの結果の比較

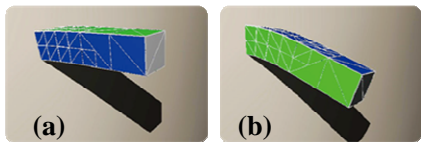


図3 異方性を持つ物体の変形シミュレーション結果の比較. (b) (a)を90度回転した場合.



図4 濃い部分が薄い部分に比べて硬い場合のシミュレーション結果

実験には Intel Core i7 X980 3.33GHz の CPU, 8.0GMの主記憶, NVidia GeForce GTX480 の GPU を搭載した PC を用いた. 図2は壁に固定した直方体が重力によって曲げられるシミュレーションを本手法と従来法とで比較したものである. 本手法と従来法との比較から十分な精度でシミュレーションできていることがわかる. 一方で1タイムステップあたりの処理時間は, 変形が少ない時は10倍以上の速度を実現した. 変形が大きい時にも従来法とほとんど変わらない処理時間で行うことができる. また非均質, 非等方な物体の変形も可能である(図3,4).

7. ディスカッション

なめらかな変形をシミュレーションするためには, モデルを細かく分割する必要がある. 一方, 安定した変形計算を行うためには, 四面体の形状はできるだけ正四面体に近いほうがよい. 図3に示す分割法を用いると, 再帰的に分割を繰り返しても, 5種類の相似な四面体のみで構成できる. これにより, 細長い四面体が生成されることはなく, 安定にシミュレーションを行うことができると考えられる.

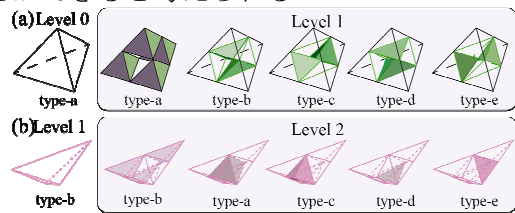


図5 安定な変形シミュレーションのための分割法

一番粗い四面体に比例する四面体を type-a とする. (a) type-a の四面体の分割方法. type-a とのこり4種(type-b, -c, -d, -e), 計5種類の四面体が生成される. (b) type-b の分割の方法. type-c, -d, -eについても同様に分割する.

8. まとめと今後の課題

本稿では適切な階層選択を行うことで効率的な変形シミュレーションを実現した.

提案法は弾性定数の近似のみ行ったが粘性定数の近似, また塑性をもつ物体や破壊のシミュレーションも課題の一つである.

参考文献

- [1] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer. Elastically deformable models. ACM SIGGRAPH Computer Graphics Vol. 21. 205-214 (1989).
- [2] J. O'Brien and J. Hodgins. Graphical models and animation of brittle fracture. Proc. ACM SIGGRAPH 1999, 137-146 (1999).